

Peter BERGER und Günter TÖRNER, Duisburg

Zur mentalen Repräsentation von Mathematik-Wissen

1. Gegenstand und theoretische Einordnung. Mit den Ergebnissen der sich rasant entwickelnden Neurowissenschaften im vergangenen Jahrzehnt – das der amerikanische Kongress programmatisch zur ‚Dekade des Gehirns‘ ausgerufen hatte – beginnt die Kognitionswissenschaft „endlich ‚den Code zu knacken‘ und zu verstehen, wie das Gehirn arbeitet und wie Geist entsteht“ (Kosslyn & Koenig 1995, Vorwort). Da ein zentrales Anliegen jeder Fachdidaktik das Beschreiben, Verstehen und Beeinflussen von *kognitiven Prozessen* ist, sind wir der Überzeugung, dass theoretische kognitive Forschung (vgl. Sigel 1999) auch im Rahmen der Mathematikdidaktik die ‚neuronale Dimension‘ nicht außer Acht lassen darf. Diesem Ansatz gemäß versuchen wir, die mentalen Repräsentationen mathematischen Wissens zu verstehen, indem wir die Strukturen der semantischen Wissensnetze untersuchen, die Individuen zu einem bestimmten mathematischen Begriff oder Thema haben.

Bestärkt durch die Ergebnisse einer Vorstudie (Törner 2001), erscheint uns dazu das Thema *Exponentialfunktion* besonders geeignet. Während Confrey (1991) eher die Mikrostrukturen mentaler Repräsentationen untersucht, interessieren uns vorwiegend Aspekte ihrer Makrostruktur. Das heißt insbesondere, dass für uns auch die Vernetzung eines begrifflichen Objekts in andere – mathematische oder außermathematische – Bereiche relevant ist (vgl. auch die Ausführungen von Ball & Bass (2000) in einem verwandten Zusammenhang). Auch außermathematische Bereiche können über die spezifischen Erfahrungen, die das Individuum in ihnen gemacht hat, seine mentalen Repräsentationen mathematischer Wissensinhalte beeinflussen. Wegen ihrer vielfältigen Anwendungsaspekte – und der damit verbundenen Vernetzung des Themas innerhalb und außerhalb der Mathematik – stellen Exponentialfunktionen für uns eine ‚ideale Forschungslandschaft‘ dar.

Wir gehen von der Grundhypothese aus, dass die in unseren Beobachtungen erhobenen Daten (Mind Maps und Interviews, s.u.) mehr oder weniger deutliche Spuren aktiver mentaler Konstruktionen unserer Forschungssubjekte enthalten. Wenn Lernen mit Umordnungsprozessen verknüpft ist, so können wir annehmen, dass solchen ‚neuen Ordnungen‘ eine subjektiv konsistente Logik zugrunde liegt, die zumindest partiell von diesen Lernprozessen beeinflusst oder sogar gesteuert wurde. Gemäß unserem Ansatz modellieren wir mentale Repräsentationen näherungsweise als Netzwerke – die Datenerhebung rekonstruiert demgemäß die Grundelemente von (gerichteten bzw. ungerichteten) Graphen: Knoten mit zwischen ihnen Beziehungen herstellenden

Kanten. Daher bietet sich als Datenstruktur diejenige von Mind Maps an. Deren statische, gewissermaßen ‚zweidimensionale‘ Graphenstruktur wollen wir allerdings um die dynamische ‚dritte Dimension‘ der Zeit erweitern: Ebenso aufschlussreich wie die Struktur des Graphen (der Mind Map) erscheint uns der Prozess seiner (Re-)Produktion im Befragungskontext (beim Zeichnen der Mind Maps) zu sein. In der Tat legen unsere Untersuchungen nahe, dass einzelne Elemente solcher Mind Maps verschiedenen Hintergrund-Ebenen angehören und erst nach und nach in den Vordergrund, d.h. ins Bewusstsein des Individuums treten (generischer Aspekt). Dabei ist interessant, ob und gegebenenfalls welche Muster sich bei diesen Prozessen erkennen lassen.

Wenn wir den Begriff der Exponentialfunktion als die ‚konzeptuelle Wurzel‘ der Mind Map verstehen, die den individuellen Prozess der Reproduktion eines komplexen Wissensnetzes initiiert –, dann offenbart die Reihenfolge der Reproduktionsschritte der verschiedenen ‚Knoten‘ und ‚Kanten‘ – so unsere Hypothese – den Einfluss von aufschlussreichen Prioritätsregeln. Solche Regeln hat bereits Green (1971) im Zusammenhang mit Beliefs postuliert, der die funktional-generativen Kategorien ‚primär versus abgeleitet‘ sowie die Ich-Beteiligungs-Kategorien ‚zentral versus peripher‘ thematisiert (vgl. dazu die ausführliche Analyse in Berger 2001, S. 42ff). Unsere Forschungsziele lassen sich im Kontext des mathematischen Wissens in den folgenden Forschungsfragen zusammenfassen: Welche Repräsentationen lassen sich beobachten? Welche Muster von Repräsentationen (bzw. von Reproduktionsprozessen) lassen sich erkennen? Verwandten Fragen ist der Sammelband von Sigel (1999) gewidmet, der allerdings nur einen mathematikspezifischen Beitrag enthält (Lesh 1999). Insofern sehen wir hier weiteren Forschungsbedarf.

2. Datenerhebung. Die Datenerhebung integriert zwei korrespondierende Datenquellen von sechs freiwilligen Testpersonen: Mind Maps und offene Video-Interviews (45–60 Minuten) zum Thema *Exponentialfunktionen*. Die Erhebung fand im Herbst 2001 statt. Die Interviewpartner waren Lehramtsstudentinnen und -studenten der Sekundarstufe II im dritten Ausbildungsjahr; eine hinreichende Erfahrung mit dem Thema konnte also vorausgesetzt werden. Es wurde ein offener Interviewstil gewählt, der sorgfältig darauf ausgerichtet war, den Eindruck einer Prüfungssituation zu vermeiden. Den Interviewteilnehmern war die Methode des Mind-Mappings vertraut, das Thema wurde ihnen erst unmittelbar zu Beginn der Befragung mitgeteilt. Nach der Bekanntgabe hatten sie etwa 10–15 Minuten Zeit, um (unbeobachtet) eine spontane Mind Map zu diesem Thema zu erstellen. Anschließend wurde im Interview zunächst eingehend die Entstehung der Mind Map erfragt. Die auswertende Analyse erfolgte durch beide Autoren sowohl separat wie auch im kritischen Diskurs (*peer debriefing*) auf Basis der Mind Maps, der Videoaufzeichnungen sowie detaillierter Transkriptionen der Interviews.

3. Ergebnisse. Aus Platzgründen beschränken wir uns hier auf eine der genannten Forschungsfragen, nämlich auf die nach den Muster der Repräsentationen, und beschreiben kurz einige wesentliche Ergebnisse unserer Analyse.

(a) *Aspekt ‚Tür-Öffner‘.* Der Knoten, der in den Mind Maps den Aspekt *exponentielles Wachstum* kodiert, fungiert als ein ‚Tür-Öffner‘ zu den Anwendungsgebieten der Exponentialfunktionen. Er hat damit gewissermaßen interdisziplinäre Qualität, da über ihn lebhaftere Verbindungen zu anderen Themenbereichen bestehen (so bei Interviewteilnehmer 1 zu Physik und Wirtschaft; 2: Chemie, Wirtschaft; 3: Physik, Geographie, Biologie; 4, 5: Physik).

(b) *Aspekt ‚Dualismen‘.* Unsere Befragten repräsentieren Wissensinhalte im Kontext der Exponentialfunktion auffallend oft in der Form von Dualismen (Graph/Term, Funktion/Umkehrfunktion, Anwendung/Theorie, anschaulich/formal, ungefähr/präzise, Realität/Schule, Lernen/Vergessen, Wissen/Nachschlagen). Auch Dualismen, die eigentlich symmetrisch sind, und deren Symmetrie den Befragten auf Nachfrage bekannt ist, werden dennoch durchweg hierarchisch repräsentiert. So werden Logarithmusfunktionen als Umkehrfunktionen von Exponentialfunktionen konzeptualisiert, nicht aber umgekehrt. Die umgekehrte Richtung wird als ‚unnatürlich‘ empfunden; die als ‚kompliziert‘ wahrgenommenen Logarithmusfunktionen werden aus dem ‚einfacheren‘ Konzept der Exponentialfunktion durch Umkehrung rekonstruiert. Auch die übrigen Dualismen scheinen als Dichotomien konzeptualisiert zu werden, die eine inhärente, affektiv geladene Bewertung der Form einfach/schwierig, wichtig/unwichtig, gut/schlecht oder ähnlich kodieren.

(c) *Aspekt ‚Huckepack-Ansatz‘.* In diesem Zusammenhang wirft Sigel (1999) die Frage auf, ob „Emotion ein eigenes Repräsentationssystem involviert, oder ‚huckepack‘ auf anderen Systemen liegt“. Unsere Beobachtungen stützen den Huckepack-Ansatz. Die Repräsentationen (auch) von Mathematik-Wissen scheinen durchweg mit emotionalen Färbungen verbunden zu sein.

(d) *Aspekt ‚Einflüsse von außen‘.* Die Mind Maps der Befragten weisen ein breites Spektrum an inhaltlicher Reichhaltigkeit und struktureller Komplexität auf, das in einer gewissen Korrelation mit dem zweiten Studienfach der Befragten steht: Das Spektrum reicht von vielfältigen Mind Maps (Interviewpartner 2: Chemie; 3, 4: Physik) über weniger vielfältige (5: Physik; 1: Sozialwissenschaft) bis zu ausgesprochen dürftigen (6: Geschichte). Hier zeichnen sich Wege der konzeptuellen Einflussnahme anderer Fächer auf die Repräsentation mathematischen Wissens ab, die noch weiterer Erforschung bedürfen.

(e) *Aspekt ‚Antididaktische Sachlogik der Mathematikvermittlung‘.* Charakteristische und konstitutive Eigenschaft der Exponentialfunktion ist es, dass sie die Differentialgleichung $f' = f$ erfüllt. Es macht nachdenklich, dass in Mind

Maps wie Interviews gerade Aussagen über die Ableitung nachgeordnete Priorität aufweisen. Wir vermuten, dass dahinter eine ‚antididaktische Sachlogik‘ der Mathematikvermittlung sichtbar wird, nämlich erst ein Objekt zu definieren und erst später Eigenschaften der Ableitung zu thematisieren.

4. Resümee. In methodischer Hinsicht hat unsere Untersuchung gezeigt, dass Mind Maps nur dann zutreffende Analysen erlauben, wenn im Rahmen eines Interviews ihr Produktionsprozess eingehend aufgeklärt wird. Die bloße Graphenstruktur von Mind Maps ist ohne Nachvollzug der zeitlichen Dimension ihrer Entstehung im allgemeinen nicht aussagekräftig genug. Die konzeptuelle Nähe von Items wird oft weniger von ihrer graphischen Nähe auf dem Blatt abgebildet, als vielmehr von ihrer zeitlichen Nähe im Assoziationsprozess. Während sich in der statischen Graphenstruktur im wesentlichen die *stored representation* des Wissens widerspiegelt, erlaubt das Interview Einblicke in die Dynamik des *working memory*. Unsere Beobachtungen belegen, dass beziehungshaltige und sinnstiftende Vernetzungen im Umfeld unseres Themas nicht primär durch die klassische Vermittlung (Vorlesung) mathematischer Inhalte gewährleistet werden kann. Anscheinend kommt hier den naturwissenschaftlichen Fächern (Chemie, Physik) eine spezifische Funktionalität zu, die von der Mathematikausbildung leider nicht geleistet wird. Die von uns beobachteten Effekte anderer Fächer auf mathematisches Wissen, ein bislang wenig thematisierter Aspekt, scheinen ein zwar ambivalentes, jedoch bedeutungsvolles Phänomen beim Aufbau mentaler Repräsentationen mathematischen Wissens zu sein, dem wir in weiteren Untersuchungen nachgehen wollen.

Literatur

- Ball, D.L. & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Hg.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*. Westport, CT: Ablex, S. 83–104.
- Berger, P. (2001). *Computer und Weltbild. Habitualisierte Konzeptionen von der Welt der Computer*. Wiesbaden: Westdeutscher Verlag.
- Green, T.F. (1971). *The activities of teaching*. New York: McGraw-Hill.
- Confrey, J. (1991). The concept of exponential functions: A student's perspective. In L. Steffe (Hg.), *Epistemological foundations of mathematical experience*. New York: Springer, S. 124–159.
- Kosslyn, S.M. & Koenig, O. (1995). *Wet mind. The new cognitive neuroscience*. New York: Simon & Schuster.
- Lesh, R. (1999). The development of representational abilities in Middle School Mathematics. In Sigel (1999), S. 323–350.
- Sigel, I.E. (Hg.) (1999). *Development of mental representation – Theories and applications*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Törner, G. (2001). Mental representations – The interrelationship of subject matter knowledge and pedagogical content knowledge: The case of exponential functions. In R. Speiser, C.A. Maher & C.N. Walter (Hg.), *Proceedings of the 23rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (October 18–21, 2001) at Snowbird (Utah)*. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse, Vol. 1, S. 321–330.

Anhang: Mind Maps zu den Interviews 1-6

[1]

Exponentialfunktion

- 10. Vorkurs
- 11. Rik-Diagramm (Dynamik)
- 9. Exponentielle Verteilung
- 8. Funktionsgraph $e^x = e^{-x}$
- 7. Ableitung $(e^x)' = e^x$
- 6. Zinseszins
- 5. Wertsatz
- 4. Exakte Zahl: $e = e^1$
- 3. Umkehrfunktion
- 2. Grenzwert
- 1. Analysis
- 0. Exponentialfunktion
- 1. Erweitern
- 2. Erweitern
- 3. Erweitern
- 4. Erweitern
- 5. Erweitern
- 6. Erweitern
- 7. Erweitern
- 8. Erweitern
- 9. Erweitern
- 10. Erweitern
- 11. Erweitern
- 12. Erweitern
- 13. Erweitern
- 14. Erweitern
- 15. Erweitern
- 16. Erweitern
- 17. Erweitern
- 18. Erweitern
- 19. Erweitern
- 20. Erweitern
- 21. Erweitern
- 22. Erweitern

[2]

Exponentialfunktion

- 15. Exponentialfunktion
- 14. Anwendung in der Wirtschaft
- 13. Wachstumsfunktion
- 12. Welche Faktoren spielen bei der Verd. eine Rolle?
- 11. Exponentialfunktion
- 10. Exponentialfunktion
- 9. Exponentialfunktion
- 8. Exponentialfunktion
- 7. Exponentialfunktion
- 6. Exponentialfunktion
- 5. Exponentialfunktion
- 4. Exponentialfunktion
- 3. Exponentialfunktion
- 2. Exponentialfunktion
- 1. Exponentialfunktion
- 0. Exponentialfunktion
- 1. Exponentialfunktion
- 2. Exponentialfunktion
- 3. Exponentialfunktion
- 4. Exponentialfunktion
- 5. Exponentialfunktion
- 6. Exponentialfunktion
- 7. Exponentialfunktion
- 8. Exponentialfunktion
- 9. Exponentialfunktion
- 10. Exponentialfunktion
- 11. Exponentialfunktion
- 12. Exponentialfunktion
- 13. Exponentialfunktion
- 14. Exponentialfunktion
- 15. Exponentialfunktion
- 16. Exponentialfunktion
- 17. Exponentialfunktion
- 18. Exponentialfunktion
- 19. Exponentialfunktion
- 20. Exponentialfunktion
- 21. Exponentialfunktion
- 22. Exponentialfunktion

[3]

Exponentialfunktion

- 17. Schrödinger-Gleichung
- 16. Exponentialfunktion
- 15. Exponentialfunktion
- 14. Exponentialfunktion
- 13. Exponentialfunktion
- 12. Exponentialfunktion
- 11. Exponentialfunktion
- 10. Exponentialfunktion
- 9. Exponentialfunktion
- 8. Exponentialfunktion
- 7. Exponentialfunktion
- 6. Exponentialfunktion
- 5. Exponentialfunktion
- 4. Exponentialfunktion
- 3. Exponentialfunktion
- 2. Exponentialfunktion
- 1. Exponentialfunktion
- 0. Exponentialfunktion
- 1. Exponentialfunktion
- 2. Exponentialfunktion
- 3. Exponentialfunktion
- 4. Exponentialfunktion
- 5. Exponentialfunktion
- 6. Exponentialfunktion
- 7. Exponentialfunktion
- 8. Exponentialfunktion
- 9. Exponentialfunktion
- 10. Exponentialfunktion
- 11. Exponentialfunktion
- 12. Exponentialfunktion
- 13. Exponentialfunktion
- 14. Exponentialfunktion
- 15. Exponentialfunktion
- 16. Exponentialfunktion
- 17. Exponentialfunktion
- 18. Exponentialfunktion
- 19. Exponentialfunktion
- 20. Exponentialfunktion
- 21. Exponentialfunktion
- 22. Exponentialfunktion

[4]

Exponentialfunktion

- 20. Exponentialfunktion
- 19. Exponentialfunktion
- 18. Exponentialfunktion
- 17. Exponentialfunktion
- 16. Exponentialfunktion
- 15. Exponentialfunktion
- 14. Exponentialfunktion
- 13. Exponentialfunktion
- 12. Exponentialfunktion
- 11. Exponentialfunktion
- 10. Exponentialfunktion
- 9. Exponentialfunktion
- 8. Exponentialfunktion
- 7. Exponentialfunktion
- 6. Exponentialfunktion
- 5. Exponentialfunktion
- 4. Exponentialfunktion
- 3. Exponentialfunktion
- 2. Exponentialfunktion
- 1. Exponentialfunktion
- 0. Exponentialfunktion
- 1. Exponentialfunktion
- 2. Exponentialfunktion
- 3. Exponentialfunktion
- 4. Exponentialfunktion
- 5. Exponentialfunktion
- 6. Exponentialfunktion
- 7. Exponentialfunktion
- 8. Exponentialfunktion
- 9. Exponentialfunktion
- 10. Exponentialfunktion
- 11. Exponentialfunktion
- 12. Exponentialfunktion
- 13. Exponentialfunktion
- 14. Exponentialfunktion
- 15. Exponentialfunktion
- 16. Exponentialfunktion
- 17. Exponentialfunktion
- 18. Exponentialfunktion
- 19. Exponentialfunktion
- 20. Exponentialfunktion
- 21. Exponentialfunktion
- 22. Exponentialfunktion

[5]

Exponentialfunktion

- 12. Wachstumsfunktion
- 11. Exponentialfunktion
- 10. Exponentialfunktion
- 9. Exponentialfunktion
- 8. Exponentialfunktion
- 7. Exponentialfunktion
- 6. Exponentialfunktion
- 5. Exponentialfunktion
- 4. Exponentialfunktion
- 3. Exponentialfunktion
- 2. Exponentialfunktion
- 1. Exponentialfunktion
- 0. Exponentialfunktion
- 1. Exponentialfunktion
- 2. Exponentialfunktion
- 3. Exponentialfunktion
- 4. Exponentialfunktion
- 5. Exponentialfunktion
- 6. Exponentialfunktion
- 7. Exponentialfunktion
- 8. Exponentialfunktion
- 9. Exponentialfunktion
- 10. Exponentialfunktion
- 11. Exponentialfunktion
- 12. Exponentialfunktion
- 13. Exponentialfunktion
- 14. Exponentialfunktion
- 15. Exponentialfunktion
- 16. Exponentialfunktion
- 17. Exponentialfunktion
- 18. Exponentialfunktion
- 19. Exponentialfunktion
- 20. Exponentialfunktion
- 21. Exponentialfunktion
- 22. Exponentialfunktion

[6]

Exponentialfunktion

- 7. Exponentialfunktion
- 6. Exponentialfunktion
- 5. Exponentialfunktion
- 4. Exponentialfunktion
- 3. Exponentialfunktion
- 2. Exponentialfunktion
- 1. Exponentialfunktion
- 0. Exponentialfunktion
- 1. Exponentialfunktion
- 2. Exponentialfunktion
- 3. Exponentialfunktion
- 4. Exponentialfunktion
- 5. Exponentialfunktion
- 6. Exponentialfunktion
- 7. Exponentialfunktion
- 8. Exponentialfunktion
- 9. Exponentialfunktion
- 10. Exponentialfunktion
- 11. Exponentialfunktion
- 12. Exponentialfunktion
- 13. Exponentialfunktion
- 14. Exponentialfunktion
- 15. Exponentialfunktion
- 16. Exponentialfunktion
- 17. Exponentialfunktion
- 18. Exponentialfunktion
- 19. Exponentialfunktion
- 20. Exponentialfunktion
- 21. Exponentialfunktion
- 22. Exponentialfunktion